

Kinder und Mathematik

Eine 5-teilige Serie

Anmerkung der Autorin:

Diese Reihe wurde speziell für die Zeitschrift „Schule“ konzipiert und erfüllt daher möglicherweise nicht die für wissenschaftliche Veröffentlichungen erforderlichen Kriterien (Zitate, Belege, Details).

Kinder und Mathematik

Teil 1

„Wie alt ist der Kapitän?“

Das Recht auf eigenes Denken im Unterricht¹

„Es gibt keine unmittelbare Übernahme des Wissens und Könnens anderer, andernfalls wären Schulen wohl weit erfolgreichere Institutionen.“
(Heinrich Bauersfeld, Universität Bielefeld)

Im Jahr 1989 erregte das Buch „Wie alt ist der Kapitän“ von Stella Baruk großes Aufsehen. 80% der befragten französischen Zweit- und Drittklässler hatten die Aufgabe „Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?“ „gelöst“ – üblicherweise mit „36 Jahre“. Eine Ausweitung der Untersuchung auf mehr Aufgaben und mehr Schüler auch anderer Jahrgangsstufen bestätigten das erschütternde Ergebnis. Auch Untersuchungen in anderen Ländern ergaben ein ähnliches Bild: Während sich Vorschulkinder und Erstklässler zu 90% weigern, solche Aufgaben zu rechnen, werden „Kapitänsaufgaben“ von einem ansteigenden Anteil von Grundschulkindern „gelöst“ – nämlich von 30% der Zweitklässler und 60% der Dritt- und Viertklässler. Der Anteil sinkt erst ab Klasse 5 wieder unter 50%.

Verstand vor der Schultür abgestellt?

Ansonsten normal entwickelte Kinder scheinen also bei der Bearbeitung solcher Aufgaben ihren Verstand auszuschalten, und zwar umso mehr, je länger sie am Mathematikunterricht teilgenommen haben. Kinder „lernen“ in diesem vor allem: „Sachrechnungen bestehen aus belanglosen Texten. Wozu also genau lesen?“ „Die geforderten Operationen sind meist die, die gerade besprochen wurden/die zu den Zahlen passen.“ „Jede Aufgabe ist lösbar. Wenn ich sie nicht lösen kann, liegt das an mir – dann bin ich „rechenschwach“ oder kann nicht „logisch denken.“

In den oben erwähnten Untersuchungen erklärten die Kinder ihre Lösungen beispielsweise so: „Der Hirte hat zu jedem Geburtstage ein Schaf oder eine Ziege geschenkt bekommen.“ - „Er hat sich für jedes Lebensjahr ein Tier gekauft, damit er immer weiß, wie alt er ist.“ - „Die Klasse ist eine besondere Klasse, weil in ihr genau so viele Kinder sind, wie die Lehrerin alt ist.“ - „Normal ist ein Mensch nicht 400 Jahre alt. Aber der Bienenzüchter heißt Ming, und der ist auf Mongor geboren. Hast du das gestern nicht im Fernsehen gesehen?“

Eine andere Sichtweise

Aus einer kompetenz- und nicht defizitorientierten Sichtweise verhalten sich die Kinder aber durchaus „vernünftig“, nämlich so, wie es von ihnen erwartet wird. Die nachträglich in Interviews befragten Kinder „wussten“ nämlich intuitiv, dass sie mit der Anzahl der

¹ Dieser Artikel enthält Auszüge aus einem Vortrag von Christoph Selter und Erich Wittmann

Tiere nicht das Alter des Kapitäns ermitteln können. Dass sie trotzdem „rechneten“, hat damit zu tun, dass sie sich so verhalten, wie es von ihnen erwartet wird: Sie verknüpfen die Zahlenangaben einer Textaufgabe, weil man das in der Schule immer so macht. Diese Haltung beendet naturgemäß jede mathematische Entwicklung.

Und tatsächlich führte eine Veränderung der Rahmenbedingungen zu deutlich weniger Lösungsversuchen bei unlösbaren Aufgaben: Wenn den Kindern nämlich vorher gesagt wurde, dass manche Aufgaben nicht lösbar seien oder auch, dass ein Erwachsener sie gleich veräppeln würde.

Was heißt das für den Mathematikunterricht?

1) Die Einstellung „Jede Aufgabe hat eine Lösung“ kann also fatale Folgen haben. Man kann ihr begegnen durch gelegentliches Einstreuen unlösbarer Aufgaben, das Stellen von Aufgaben mit mehreren Lösungen, in erster Linie aber durch das gemeinsame Reflektieren darüber.

2) Sinnerfassendes Lesen und ein kritischer Blick auf das, was einem „vorgesetzt“ wird, müssen gefördert werden, z.B. durch viel weniger eingekleidete Aufgaben, durch die Verwendung von Texten, die wirklich lesenswert sind, durch Amüsantes, Verblüffendes, Falsches (z.B. aus Zeitungen) und durch echte Sachaufgaben bis hin zu Projekten.

3) Die Lesefähigkeit hängt sehr stark vom Interesse am Inhalt ab. Lesen ist Sinnstiftung. Die Substanzlosigkeit vieler Aufgabentexte erschwert dies beträchtlich: „Auf der Waage liegen 7 Würstchen. Jedes wiegt 95 g.“ (Wozu liegen diese zusammen auf der Waage, wenn man ihr Gewicht durch Multiplizieren ermitteln soll?).

4) Kinder sollen auch immer wieder eigene Sachaufgaben erfinden dürfen.

Das Beispiel „Ich gehe zum Bäcker und kaufe 10 Weckerl. Jedes kostet 25 Cent.“ erscheint auf den ersten Blick auch nicht besser als die eingekleideten Aufgaben aus den Schulbüchern. Der Unterschied liegt allerdings in den Reaktionen der Kinder: Hätte die Aufgabe im Schulbuch gestanden, dann hätten wohl die meisten Kinder sofort 2,50 Euro errechnet. Anders die spontanen Äußerungen der Kinder auf diese Aufgabe aus den eigenen Reihen: „Es gibt aber doch verschiedene Sorten, Sesam, Roggen und so. Die kosten nicht alle gleich viel!“ - „Wir sind eine große Familie. Ich hole am Samstag immer 20 Weckerl. Mein Bruder mag am liebsten die mit Käse überbackenen.“ - „Beim Lidl sind die aber billiger, ich glaube, die kosten dort nur 15 Cent.“ - „Bei unserem Bäcker kosten die normalen Weckerl aber nur 20 Cent.“

Hier geschieht etwas Wichtiges: Die Kinder lernen, Vorgegebenes nicht unreflektiert hinzunehmen und spontan draufloszurechnen, sondern kritisch mit Texten umzugehen, sich Informationen zu besorgen, Vergleiche anzustellen – und letztlich auch eine andere Einstellung gegenüber Schulbuchaufgaben.

Beispiele zum Ausprobieren in der eigenen Klasse (ohne „Vorwarnung“ und gemischt mit lösbaren Aufgaben, wie z.B. „Michael ist 8 Jahre alt. Seine Mutter ist um 26 Jahre älter. Wie alt ist Michaels Mutter?“): „Ein 27 Jahre alter Hirte hat 19 Schafe und 13 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?“ - „In einer Klasse sind 13 Buben und 15 Mädchen. Wie alt ist die Lehrerin?“ - „Auf einem Schiff sind 36 Schafe. Davon fallen 10 ins Wasser. Wie alt ist der Kapitän?“ - „In der Klasse sind 7 Reihen mit je 4 Tischen. Wie alt ist die Lehrerin?“ - „Ein Bienenzüchter hat 5 Bienenkörbe mit jeweils 80 Bienen. Wie alt ist der Bienenzüchter?“

Buchtipps: Christa Erichson, Geschichten, mit denen man rechnen kann. vpm-Verlag (2008). Authentische Sachtexte über Tiere, Erfindungen, Bauwerke, sportliche und historische Ereignisse, die neugierig machen.

Kinder und Mathematik

Teil 2

Mathematik entdecken und verstehen

Oder: Ein langes Band aneinandergereihter Worte ...²

„Ich wenigstens kenne keine vollbefriedigende Erklärung dafür, warum jede ungerade Zahl (von 3 ab), mit sich selbst multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 mit 1 als Rest ergibt.“
(Erich Bischoff, Erforscher der Kabbalah, 1920)

Die Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien haben den heutigen Mathematikunterricht in Diskussion gebracht. Schüler in Ländern, in denen der Mathematikunterricht problemlösungsorientiert ist, haben eine signifikant höhere mathematische Kompetenz als jene, die einen stark lehrerzentrierten Unterricht, eine Art „Meisterlehre“, haben: Der Lehrer macht etwas vor, die Schüler machen es nach. Diese Form von Unterricht fördert das Verstehen nicht. Verstehen entwickelt sich durch die eigenständige Auseinandersetzung mit Problemen oder Begriffen.

Problemlöseunterricht

„Problemlöseunterricht“ mutet den Kindern zu, Probleme zu lösen, für die sie noch keine festen Verfahren zur Verfügung haben, die sie aber dabei selbst entwickeln. Im Vordergrund des Unterrichts steht dann die Diskussion über die verschiedenen Lösungswege und das Problemlöseverhalten der Kinder. Erst dann wird – in durchaus intensiver Einzelarbeit – geübt und automatisiert, denn Üben kann nur nachhaltig sein, wenn das zu Übende vorher verstanden wurde.

Beim traditionellen Unterricht steht das Beherrschen der schriftlichen Verfahren, die im Alltag kaum noch angewendet werden, immer noch sehr stark im Vordergrund. Diese haben zwar den Vorteil, dass sie schematisch ablaufen und deshalb auch von Kindern mit Rechenschwierigkeiten „abgearbeitet“ werden können – ein Grund, warum selbst gravierende Rechenschwierigkeiten im traditionellen Unterricht viel zu spät entdeckt werden. Es wird jedoch sehr wenig Wert darauf gelegt, Kinder zu befähigen, sinnvoll mit Zahlen umzugehen, sicher und variationsreich bei den anzuwendenden Operationen zu sein, Rechenstrategien flexibel einsetzen zu können oder Ergebnisse abzuschätzen (Größen überschlagen, was kommt ungefähr heraus, ist das Ergebnis sinnvoll, kann das überhaupt sein, oder ist das um eine Kommastelle verschoben).

Wissensnetze knüpfen

Lernen ist nicht bloßes Abspeichern von Einzelfakten, sondern Knüpfen eines Wissensnetzes. Das Einmaleins beispielsweise gilt als Prototyp für auswendig verfügbares Wissen. Natürlich gehört das blitzartige Nennen richtiger Antworten zu den Werkzeugen, die benötigt werden, um komplexere Aufgaben lösen zu können. Daher darf ein entsprechendes Automatisierungstraining nicht fehlen. Aber auch hier sollten *vorher* die grundlegenden Beziehungen zwischen den einzelnen Aufgaben aktiv lernend „erforscht“ worden sein. Ein Kind sollte – durch eigenes Tun – etwa bei der Aufgabe 4×5 die Nachbaraufgaben 3×5 und 5×5 , die Verdoppelungsaufgabe 8×5 , die Tauschaufgabe 5×4 und die beiden Umkehraufgaben $20:4$ und $20:5$ „mitdenken“. Lernt ein Kind solche Zusammenhänge zu nutzen, so ist dies von Bedeutung über das kleine Einmaleins

² Dieser Artikel enthält Auszüge aus dem Interview „Den Blick des Lehrers auf das Denken der Kinder richten“ mit Jens Holger Lorenz

hinaus. Dann ist es nämlich kein großes Problem, Aufgaben wie 19×4 oder 24×50 auszurechnen, ohne das Normalverfahren des schriftlichen Multiplizierens anwenden zu müssen. Denn 19×4 ist um 1×4 weniger als 20×4 . Und 24×50 kann man bequem berechnen, wenn man ausnutzt, dass zwei Fünziger einen Hunderter bilden, also 24×50 das Gleiche ist wie 12×100 . Solches Verknüpfen mit Bekanntem ist ein Grundvorgang des Denkens und des Lernens.

Nachdenken

Nachdenken ist – nicht nur in der Mathematik – ein wesentliches Element jeglichen Lernens. Ein Kind kann jahrelang mit Plättchen, Stäben oder Blöcken hantieren – es wird deswegen noch lange nicht die Strukturen erkennen, die diese aufzeigen sollen. Denn diese sind nicht im Material enthalten, sondern müssen vom Kind „im Kopf“ entwickelt werden. Nicht die Handlung selbst ist wichtig, sondern das *Nachdenken* über die Handlung.

Kinder sind im Mathematikunterricht gleichzeitig *unterfordert* und *überfordert*: Sie bekommen vom Lehrer etwas vorgemacht, das sie nachmachen sollen. Da sie es aber nicht verstehen, können sie es nur rein schematisch auswendig lernen. Sie wissen dann zwar, wie die schriftliche Subtraktion „geht“, dass man da einen Übertrag macht usw., sie haben aber nicht verstanden, warum. In diesem Sinn ist der gängige Unterricht eine Überforderung. Auf der anderen Seite sind die Kinder in vielerlei Hinsicht unterfordert, weil man sie mit sehr vielen problemhaltigen Situationen konfrontieren könnte und sie dann auch wirklich verstehen würden – vermutlich durchaus schneller.

Ein langes Band aneinandergereihter Worte

Lorenz plädiert dafür, dass Lehrer – zumindest wenn es auf Belehren und Instruieren hinausläuft – so wenig wie möglich reden, denn dies sei für das Verstehen kontraproduktiv.

„Wir Lehrer – wahrscheinlich alle Menschen – werden von einer erstaunlichen Täuschung genarrt. Wir glauben, wir könnten ein Bild, eine Struktur oder ein funktionstüchtiges Modell einer Sache, die wir in unserem Geiste aufgrund langer Erfahrung und Vertrautheit zusammengesetzt haben, in den Geist einer anderen Person übertragen, indem wir es in ein langes Band aneinandergereihter Worte verwandeln. [...]. In den meisten Fällen erhöhen Erklärungen das Verständnis nicht und vermögen es eher herabzusetzen“. (Holt, 1979).

Experte für mathematische Lernprozesse

Trotz der geforderten Zurückhaltung beim Reden im Sinne von Belehren ist die Rolle der Lehrperson eine immanent wichtige. Will man nämlich „Lernschwierigkeiten“ in Mathematik vorbeugen und abhelfen, muss man vor allem Experte für Lernprozesse in Mathematik sein:

- Die Lehrperson sollte ein „diagnostisches Auge“ auf die Kinder und ihre Denkwege und ihre Fehler haben. Und sie soll erkennen können, wo sie Fehlstrategien haben und Fehlmuster entwickeln. Kurz: Sie sollte die Fähigkeit zur „Denkanalyse“ (Michael Gaidoschik) haben. Das bedeutet, dass sie diagnostisch sehr viel besser geschult sein müsste, als sie dies auf Basis der aktuellen Lehrerausbildung ist.
- Lehrer/innen sollten es als Herausforderung ansehen, sich problemhaltige Situationen zu überlegen, deren Lösungen nicht direkt zu sehen sind, die also ein Nachdenken über die Situation erfordern.
- (Grundschul) Lehrer/innen sollten aber vor allen Dingen sehr viel mehr über die Mathematik wissen!

Buchtipp: H. Spiegel & Ch. Selter, Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Klett/Kallmeyer (2008) – ein Buch für alle, die mehr über das Denken von Kindern wissen wollen.

Kinder und Mathematik Teil 3

„Weil wir viel entdecken, erfinden und machen ...“³

Oder: Die Fortschrittlichkeit des Lehrplans und die Rückständigkeit der Schulbücher

Erkenne die Eins. Erkenne die Zwei. Erkenne die Eins in der Zwei.
Erkenne die Drei. Erkenne die Eins und die Zwei in der Drei.
(frühägyptische Tontafel, ca. 3000 v. Chr.)

... darum findet Robin sein Lieblingsfach Mathematik gut. In seiner Klasse hatte sich im Laufe der vier Grundschuljahre eine Kultur entwickelt, in der die Mathematik als Arbeit und Abenteuer erlebt wurde. Neugierig auf Neues und Schwieriges, entdeckten die Kinder selbstständig und mit großem Eifer mathematische Muster und Zusammenhänge, übten Erkanntes in vielfältiger Weise ein und – was für sie das Wichtigste war: Sie durften selbst Erfinder sein und darüber mit ihren Mitschülern und der Lehrerin diskutieren. Letztere war übrigens immer wieder überrascht von der Vielzahl, der Vielfalt und der Qualität der Ideen der Kinder.

Paradigmenwechsel

„In der Mathematik-Didaktik wird seit etwa zwei Jahrzehnten ein Paradigmenwechsel, eine ‚konstruktivistische Wende‘ propagiert. Oberster Grundsatz dieses (vor allem in Österreich noch kaum in der Unterrichtswirklichkeit angekommenen) Ansatzes ist das aktiv entdeckende Lernen“, so Michael Gaidoschik, Leiter des Instituts für Rechenschwäche in Wien und Graz: Kinder lernen Mathematik nicht dadurch, dass man ihnen Rechenverfahren als fertigen „Lernstoff“ vorsetzt, sondern indem sie quantitative Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten durch eigenes Tun selbst entdecken. Aufgabe der Lehrperson ist es, diese Eigenentdeckungen im Rahmen eines beständigen Lehr-Lern-Dialogs anzuregen und zu unterstützen – durch mathematische Problemstellungen, die dem Vorwissen und den Interessen der Kinder entsprechen, durch gezieltes Anbieten von Informationen und durch Ermutigung zu eigenen Lösungswegen, Strategien, Gedanken und Rückmeldungen über die Qualität der Konstruktionen der Kinder.

Nach Gaidoschik und anderen Mathematikdidaktikern gelten diese lernpsychologisch fundierten und mittlerweile durch umfassende Unterrichtserfahrungen und Praxisstudien abgesicherten Grundüberlegungen *auch* und *gerade* für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim mathematischen Lernen.

Fortschrittlicher Lehrplan

Der Lehrplan der Volksschule ist dem realen, traditionellen Unterricht weit voraus:

„Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, schöpferisch tätig zu sein, rationale Denkprozesse anzubahnen, die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren, grundlegende mathematische Techniken zu erwerben.

Schöpferische Fähigkeiten sind durch spielerisches, forschend-entdeckendes und konstruktives Tun aufzubauen.“ (Lehrplan der Volksschule, Seite 115).

Die Realität der Schulbücher

Was durch traditionelle Schulbücher vorgeschrieben wird, steht dazu in krassem Widerspruch: In kleinsten Schritten werden die Kinder in die Welt der Zahlen eingeführt.

³ Titel des gleichnamigen Artikels aus „Grundschule aktuell“, Februar 2005, Heft 89

Obwohl sich die meisten besonders für große Zahlen interessieren, sind sie irgendwann vor Weihnachten bei der Menge vier, fünf, sechs oder sieben angelangt.

Der Großteil des ersten Schuljahres wird für die Erarbeitung der Zahlen bis 10 verwendet, dann wird er auf 20 und 30 erweitert. Im zweiten Schuljahr werden die Zahlen bis 100 erarbeitet, im dritten ist bei 1000 Schluss, im vierten bei 1000000.

Michael Gaidoschik meint dazu: „Gerade die massiven und hartnäckigen Schwierigkeiten, die manche Kinder beim Verstehen ‚großer Zahlen‘ bis in die Sekundarstufe hinein haben, sollte Anlass dafür sein, die Sinnhaftigkeit dieser Tradition zu überdenken.“ Er sagt ganz klar, dass die traditionelle Stufung nicht der Logik des Stellenwertsystems entspreche. Die künstliche Begrenzung bis 20 oder 30 erschwere den Kindern die Einsicht in das Stellenwertsystem beträchtlich, weil das Rechnen innerhalb von zwei oder drei Zehnern den Blick auf das Gesamte, auf die Zusammenhänge zwischen 10 und 100 oder 10000 etc., verstelle.

Der Lehrplan für Volksschulen sieht bis zum Ende der Grundstufe I den Auf- und Ausbau der Zahlen bis 100 vor – eine Begrenzung auf den „Zahlenraum 30“ findet sich dort jedenfalls nicht. Diese scheint eine nicht hinterfragte Tradition von Schulbuchautoren zu sein.

Kleinschrittig und rückschrittlich

„Es gibt kaum ein zweites Fach auf der Primarstufe, welches durch herkömmliche Lehrmittel so rigide durchgeplant erscheint wie der Mathematikunterricht. Je kleinschrittiger die Planung und je mehr sie die gleichen Aufgaben für alle enthält, desto mehr gerät sie in Widerspruch zum Lernen der Kinder als einer aktiven Sinnkonstruktion. Die Orientierung am imaginären Durchschnitt einer Klasse führt überdies zu Problemen mit zwei Extremgruppen von Kindern, nämlich den besonders langsam und den sehr schnell lernenden“, heißt es in der Beschreibung des Projekts „Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht“⁴.

Die Faszination der großen Zahlen

„Kinder lieben ‚große Zahlen‘. Und es ist sinnvoll, dieser Liebe im Unterricht zu entsprechen!“ (Michael Gaidoschik). Kinder, die im „freien Rechnen“ experimentieren und sich an „große Zahlen“ heranwagen dürfen, erkennen übergeordnete Zusammenhänge viel eher, und es ist ihnen auch eher einsichtig, dass sie sich in kleineren Zahlenräumen Fertigkeiten aneignen müssen, um mit den größeren umgehen zu können. Natürlich können nicht alle Kinder von Anfang an mit großen Zahlen *rechnen*. Dennoch sollte der „erlaubte Zahlenraum“ nicht (wie es die Schulbücher vorgeben) künstlich begrenzt werden. Alle Kinder sollten – entsprechend ihren Vorkenntnissen und Fähigkeiten – durch handelndes und entdeckendes Lernen von Anfang an eine grundlegend positive Einstellung zum Universum der Zahlen entwickeln dürfen.

Buchtipp

„Das Zahlenbuch“ von Wittmann & Müller (ÖBV) und „Die Matheprofis“ von Arends und Mitarbeitern (Veritas): Hierbei handelt es sich um die ersten in Österreich approbierten Lehrwerke, die auf der konstruktivistischen Sicht des Erwerbs mathematischer Konzepte und Fertigkeiten aufbauen. Kernpunkte der beiden Lehrwerke sind aktiv-entdeckendes Lernen *und* produktives Üben, vor allem aber auch die Betonung der Schönheit und Nützlichkeit der Mathematik.

⁴ www.mathe-projekt.ch

Kinder und Mathematik

Teil 4

Dyskalkulie?

Oder: Mit Schwierigkeiten muss gerechnet werden!

„Verstehen des Verstehbaren ist ein Menschenrecht.“
Martin Wagenschein, Pädagoge, Mathematik- und Physiklehrer (1896-1988)

„Kein Kind kommt bereits mit einer ‚Rechenschwäche‘ in die Schule, denn ‚Rechenschwäche‘ ist ja nichts anderes als eine sehr unscharfe Bezeichnung für besondere Schwierigkeiten, die manche Kinder **in der Auseinandersetzung** mit den Inhalten der Schulmathematik entwickeln“, so Michael Gaidoschik in der Einleitung zur seiner „Checkliste zum Schulanfang“⁵.

Dyskalkulie ...

Die am medizinisch-psychiatrischen Krankheitsbegriff orientierte Dyskalkulie-Forschung bemüht sich nach wie vor, Faktoren *im Kind* als Ursache für die „Störung“ herauszufinden. Rechenschwäche wird als individuelles Defizit mit pathologischer Valenz gesehen und gehöre daher in den Kompetenzbereich sonderpädagogischer oder therapeutischer Fachleute. Diese Sichtweise, nach der es sich hierbei um vom Unterricht unabhängige individuelle Defizite handelt, kommt Lehrpersonen natürlich sehr entgegen.

...oder didaktogene Rechenschwierigkeiten?

Aus der Sicht zahlreicher Grundschulmathematikdidaktiker ist allerdings der *Unterricht* eine wesentliche Ursache der sogenannten Rechenschwäche. Dies ist nun nicht die „Schuld“ des einzelnen Lehrers, der sich in den meisten Fällen sehr bemüht – aber eben doch immer in der Weise, dass Kindern mit Schwierigkeiten nur „Mehr vom Gleichen“ angeboten wird (sei es nun im Förderunterricht oder in Übungsangeboten). Es fehlt an Wissen um eine gesicherte Früherkennung von sich abzeichnenden und an Möglichkeiten gezielter Förderung bei vorhandenen Schwierigkeiten. Insofern sind Rechenschwierigkeiten zu einem großen Teil hausgemacht bzw. „didaktogen“.

Neuere Definition von „Rechenschwäche“

Wilhelm Schipper, Mathematikdidaktiker an der Universität Bielefeld, spricht – wie viele andere seiner Fachkollegen – von „besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens. Es handelt sich in erster Linie um ein schulisches Problem, das (vorrangig) mit schulischen Mitteln angegangen werden muss.“

Mit „rechenschwachen“ Kindern muss gerechnet werden

Laut Natascha Korff, Mathematikdidaktikerin an der Universität Bremen, sind Rechenschwierigkeiten Variationen des ganz normalen Entwicklungsspektrums, die im Unterricht aufgefangen werden müssen. Der erfolgreiche Erwerb mathematischer Kompetenzen sei nicht so sehr eine Frage der Intelligenz oder Begabung, sondern eine Frage der Vorerfahrungen, der bisherigen Möglichkeiten des Probierens und Tuns. Mit Kindern, die diesbezüglich noch wenig mitbringen, muss also *gerechnet* werden. Und sie müssen – z.B. durch Erhebung der Vorkenntnisse zu Schulbeginn – identifiziert werden, damit der Unterricht so gestaltet werden kann, dass auch diesen Kindern die Möglichkeit gegeben wird, den Erwerb mathematischer Grundlagen erfolgreich zu meistern.

⁵ www.rechenschwaechе.at

Was zeichnet „Rechenschwäche“ aus?

Ziel des Forschungsprojekts „Rechenschwäche erkennen, beheben, vorbeugen“ von Hans-Dieter Gerster und Mitarbeitern an der PH Freiburg war es, herauszufinden, worin genau die Schwierigkeiten sogenannter rechenschwacher Kinder beim Erlernen des Rechnens bestehen und wie diese Schwierigkeiten möglichst frühzeitig erkannt und behoben werden können. Dazu wurden die Denkwege der Kinder beim Lösen von Rechenaufgaben in diagnostischen Interviews erfasst:

Die wichtigsten Hindernisse beim Erlernen des Rechnens

- Einseitiges Zahlverständnis: Zahlen werden nicht als Mengen, sondern als Positionen in der Reihe von Zahlwörtern (z.B. „acht“ als „der achte Finger“) gedacht und nicht als Zusammensetzung von Teilmengen – damit fehlt auch das Verständnis für das Zehnersystem;
- einseitiges Operationsverständnis: Rechnen als Schritte, als Vorwärts- oder Rückwärtshüpfen auf der Zahlwortreihe (häufig unterstützt durch den unreflektierten Einsatz von „Anschauungsmaterial“, wie z.B. Plättchen, Zahlenstrahl, Hundertertafel) – daraus folgt zählendes Rechnen;
- und als Folge des fehlenden Grundlagenverständnisses mangelhafte und „störanfällige“ Automatisierung der Basisfakten – und damit Beibehalten des zählenden Rechnens.

Die Bedeutung der allerersten Lernschritte

„Die elementaren Grundlagen des gesamten mathematischen Begreifens werden in den ersten beiden Schuljahren geschaffen. Daher kommt den allerersten Lernschritten eine große Bedeutung zu.“, meint Michael Wehrmann vom Institut für Mathematisches Lernen in Braunschweig. Er stellt nach mehr als zehnjähriger Therapieerfahrung mit „rechenschwachen“ Kindern fest, dass der von vielen Kindern betriebene hohe und oft vergebliche Arbeitsaufwand für die Bewältigung einfachster Rechenaufgaben schlicht der Tatsache zu verdanken sei, dass diese Kinder wesentliche Grundgedanken des mathematischen Systems noch nicht verstanden haben.

Was heißt das für den Mathematikunterricht?

- Oberstes Gebot des mathematischen Anfangsunterrichts ist es, den Kindern ein grundlegendes Verständnis für die Zusammensetzung von Zahlen aus anderen Zahlen zu vermitteln, und zwar von Anfang an. Der Zahlenraum 10 ist die Grundlage unseres Stellenwertsystems. Kinder müssen eine tragfähige Zahlvorstellung in diesem Zahlenraum entwickeln, die darin besteht, dass ein Kind die Zahlen immer in ihren Bezügen zu anderen Zahlen denkt, dass z.B. bei „7“ stets in der Gliederung „5+2“ gedacht wird. Ist dies der Fall, dann erübrigt sich bei „7-5“ das Zählen. „Die Zahl ‚7‘ ist erst dann hinreichend verstanden, wenn dabei ‚6+1‘, ‚5+2‘, ‚4+3‘ ... selbstverständlich mitgedacht werden“, so Michael Gaidoschik vom Institut für Rechenschwäche in Wien und Graz.
- Kinder müssen die Rechenoperationen auch in diesem kleinen Zahlenraum *verstehen*, d.h. sie müssen erkennen, was bei einer Addition oder Subtraktion „geschieht“. Rein mechanisches Rechnen (z.B. das Absolvieren von Reihenrechnungen) oder das unreflektierte Anbieten von „Anschauungsmaterial“ fördert dieses Verständnis in keiner Weise. Auch das häufig empfohlene „Üben, üben, üben!“ führt bei Kindern, die noch keine Zahlauffassung entwickelt haben, nicht zum Erfolg, da die Verständnisgrundlagen fehlen. Geübt wird nur, was das Kind ohnehin schon kann, nämlich das Zählen.
- Automatisieren setzt Verstanden-Haben voraus. Verstehen wiederum setzt eigenaktives Handeln, Verbalisieren-Können und reflektierendes Nachdenken über die Handlung voraus.

Buchtip: Michael Gaidoschik, Rechenschwäche vorbeugen. Das Handbuch für Lehrerinnen und Eltern. öbv & hpt (2007)

Kinder und Mathematik

Teil 5

Wie viele Reiskörner passen in einen Schuhkarton?

Oder: Der Blick auf die Welt durch die mathematische Brille

Wie viele Menschen sind in einem 6 km langen Stau?
Wie viele Bücher kann ich in einem Jahr lesen?
Um wie viele Tage wird mein Leben kürzer, wenn ich die Zeit,
die ich vor dem Fernseher verbringe, abziehe?

Fragen dieser Art nennt man Fermi-Aufgaben, benannt nach dem italienischen Kernphysiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi (1901-1954), der dafür bekannt war, dass er sich bei seinen Studenten vor allem für deren Denkwege interessierte und ihnen sonderbare Fragen stellte – z.B. „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“. Fermi-Aufgaben sind realitätsbezogen und fördern Kompetenzen wie das Erforschen, das Überschlagen, das Arbeiten mit großen Zahlen, das Umrechnen von Größen, das Nutzen von Alltagswissen, das Argumentieren, das Kommunizieren, die Selbstständigkeit und das Anwenden heuristischer Strategien. Sie fordern heraus, regen das Weiterdenken an und öffnen den Blick für die Mathematik der Welt.

Fermi-Aufgaben für Kinder

Welcher Lehrer redet am meisten? Wie viele km legt ein Lehrer im Schulgebäude pro Tag zurück? Was ist schwerer: Alle Lehrerinnen und Lehrer zusammen oder alle Schülerinnen und Schüler? Oder alle Schulbücher? Oder das Schulgebäude? Denkt euch eine eigene Frage aus, die ihr erforschen könnt!

Kleine Schritte

Wer sich bisher ausschließlich oder überwiegend an die Vorgaben des Schulbuches gehalten hat, wird sich natürlich schwertun, dieses einfach in den Schrank zu stellen. Vielleicht ist es aber möglich, wenigstens einen Teil der verfügbaren Unterrichtszeit für entdeckende und das Verständnis fördernde Aktivitäten der Kinder bereit zu stellen. Hierzu einige Anregungen:

Freies Rechnen

Jedes Kind hat etwa 20 Minuten lang die Möglichkeit, eigene Untersuchungen anzustellen und seinen eigenen Ideen nachzugehen. Jedes Kind führt seine eigene Forschung durch und durchläuft dabei seinen individuellen Lernprozess. Die Kinder sind angehalten, ihre Gedankengänge durch Notizen festzuhalten. Die Kinder haben viel Spaß bei dieser „Forscherarbeit“ und schrecken auch vor großen Zahlen nicht zurück. Alle Ergebnisse werden in einem Ordner gesammelt. Das Durchsehen der Ergebnisse zeigt der Lehrerin, wo Lücken bestehen. Sie ist über den Leistungsstand der Klasse genau informiert und kann einzelne Themen in den anderen Rechenstunden systematisch behandeln.

Eigenproduktionen der Kinder

Die Kinder erstellen selbst ausgedachte Knobelaufgaben, Aufgabensammlungen, Rechengeschichten und Projekte. Das Verfassen von eigenen Aufgaben – und der Austausch darüber – wird zum zentralen Bereich des Unterrichts. Es ergeben sich immer wieder Aktionen und Projekte, die den Bereich der Arithmetik mit den Bereichen Geometrie und Größen verbindet – sei es die Erstellung von Eintrittskarten für Vorstellungen, das Wiegen beim gemeinsamen Backen, das Vermessen und Umrechnen bei Modellbauprojekten oder der Gebrauch geometrischer Formen beim Basteln von Verpackungen oder Laternen.

Erfinderrunden

Die Erfinderrunde ist eine sehr effektive Übung im Sich-Hineindenken in andere Darstellungen und im Verbalisieren von eigenen Gedanken, die durch den Rätselcharakter besonders motivierend ist. Sie folgt einem festgelegten Ritual: Sechs bis sieben Kinder zeigen an der Tafeln ihre mathematischen Erfindungen, die sie groß und deutlich auf ein großes Blatt geschrieben haben. An der Tafel hängen also sieben Zettel, die der Reihe nach angeschaut werden. Die Regel lautet, dass alle Kinder sich zu der jeweils betrachteten Erfindung äußern und überlegen, was der Erfinder wohl gemeint hat. Sie können die Aufgabe lösen und kommentieren. Erst am Schluss kommt der Erfinder selbst zu Wort.

Knobelaufgaben

Bei der „Knobelei“ der Woche kommt es nicht darauf an, dass die Kinder die Aufgabe lösen, sondern dass sie sich damit auseinandersetzen. Ein Beispiel:

„Der Kochlehrling will ein Rezept für eine Zwiebelsuppe ausprobieren. Er liest die Anleitung: 500 g Zwiebeln, ..., 4 Tassen Wasser. Er hat aber nur einen Behälter, der 3 Tassen fasst und einen, der 5 Tassen fasst. Wie kann er die im Rezept angegebenen 4 Tassen abmessen? Wer kann die Rätselnuss knacken?“

Die ständige Herausforderung, die Denkspiele – z.B. der „Turm von Hanoi“ – darstellen, bereichern die Arbeit dadurch, dass immer wieder neue Erkenntnisse zu immer wieder neuen Diskussionen führen, bis die zugrundeliegende mathematische Struktur erfasst ist.

Rechenkonferenzen

In Analogie zu den bekannten Schreibkonferenzen, in denen die Kinder ihre Texte vorlesen und Verbesserungsvorschläge bekommen, sind auch Rechenkonferenzen eine von den Kindern selbstständig organisierte Gruppenarbeit. Die Themen ergeben sich aus dem jeweils aktuellen Stoff oder aus besonderen Interessen der Kinder – vom Austausch von Lösungswegen bei „schwierigen Rechnungen“ bis hin zur Beschäftigung mit Primzahlen („Ich hab gestern im Fernsehen etwas über *Primelzahlen* gesehen und möchte mehr darüber wissen.“).

Einführen – Forschen - Nachdenken

Die Praxis hat gezeigt, dass die Gliederung einer Sequenz in die drei Phasen „gemeinsamer Einstieg – selbstständige Erkundung – gemeinsame Reflexion“ sowohl für den Lehrer als auch für die Kinder praktikabel und ergiebig ist: Der Lehrer hat die nötige Zeit und Ruhe, um die Aktivitäten der Kinder zu beobachten und um Fragen aufzunehmen oder zu klären, die Kinder dürfen – ganz im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens – forschen und probieren.

Üben und Automatisieren

Nach solchen eigenaktiven Phasen – und nicht statt dieser – hat intensives Üben und Automatisieren Sinn und Nachhaltigkeit und ist den Kindern zur Erreichung der für „wirklich interessante Mathematik“ erforderlichen Fertigkeiten einsichtig.

Buchtipps: „Forscherhefte und Mathematikkonferenzen in der Grundschule“ und „Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht in der Grundschule“ (vpm-Verlag). Lernbücher, Lehrerband und Unterrichtsmaterialien, die zum Entdecken anregen und Mathematik lebendig machen